Διαφορικη Γεωμετρια 14/11/16

Κρισιμα Σημεια:

Ορισμος: Εστω $F: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ λεια συναρτηση. Το $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ καλειται κρισιμο σημειο της F αν-ν $F_x(P_0) = F_y(P_0) = F_z(P_0) = 0$

Θεωρημα: Εστω $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ λεια και $a \in f(U)$. Αν το συνολο $f^{-1}(a) = \{(x,y,z) \in U : f(x,y,z) = a\}$ δεν περιεχει κανενα κρισιμο σημειο τοτε η f ειναι κανονικη επιφανεια.

Αποδειξη:

Εστω $P_0 \in f^{-1}(a)$. Απο υποθεση εχω οτι $(f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0)) \neq (0,0,0)$. Υποθετω οτι $f_z(P_0) \neq 0$. Θεωρω την απεικονιση $F: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $F(x,y,z) = (x, y, f(x,y,z))$. Η Ιακωβιανη ορίζουσα της F στο A ειναι:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x(P_0) & f_y(P_0) & f_z(P_0) \end{vmatrix} = f_z(P_0) \neq 0$$ αρα αντιστρεφεται

$F(x,y,z) = (u,v,t) \iff (x, y, f(x,y,z)) = (u,v,t)$

$$(S)\begin{cases} x = u \\ y = v \\ f(x,y,z) = t \end{cases}$$

Θεωρημα αντιστροφης απεικονισης λεει οτι το (S) εχει μοναδικη λυση:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = g(u,v,\cancel{t}) \end{cases} \to \text{γραφημα}$$

και τα γραφηματα ειναι κανονικες επιφανειες

Παραδειγματα:

① Σφαιρα $S^2_R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$, $R > 0$

Θεωρω τη λεια συναρτηση $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-R^2$. Παρατηρω οτι $S_R^2 = f^{-1}(0)$

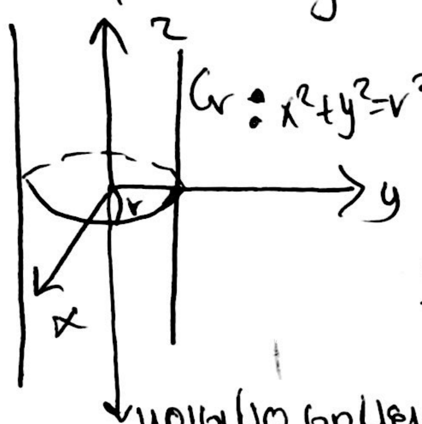
Αναζητω τα κρισιμα σημεια της f. Λυνω το συστημα

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \\ f_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

Τα μονα κρισιμα σημεια της f ειναι το $(0,0,0) \notin f^{-1}(0)$

Συμφωνα με το θεωρημα το S_R^2 ειναι κανονικη επιφανεια

② Ορθοι κυκλικοι κυλινδροι



κρισιμο σημειο ο αξονας z

Θεωρω $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2+y^2-r^2$

Ειναι λεια και ισχυει $f^{-1}(0) = C_r$

Αναζητω τα κρισιμα σημεια της f λυνοντας το συστημα

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \\ f_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

<u>Συμπερασμα</u>: Το συνολο των κρισιμων σημειων ειναι το $\{0,0,z\}$ $z \in \mathbb{R}$. Κανενα κρισιμο σημειο δεν ανηκει στο $f(0) \xRightarrow{\text{θεωρ}} C_r$ κανονικη επιφανεια.

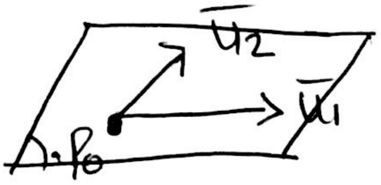
③ Επιπεδα: $\Pi: Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$

$(A, B, \Gamma) \neq (0,0,0)$

Θεωρω την $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y,z) = Ax + By + \Gamma z + \Delta$

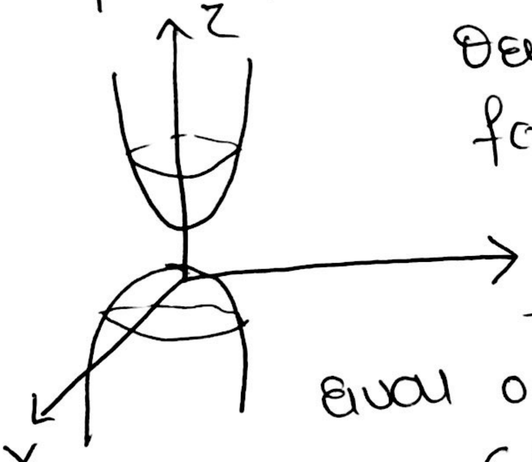
Προφανως ισχυει $f^{-1}(0) = \Pi$

$(f_x, f_y, f_z) = (A, B, \Gamma) \neq (0,0,0)$ αρα δεν υπαρχει κανενα κρισιμο σημειο $\Rightarrow f^{-1}(0) = \Pi$ ειναι κανονικη επιφανεια



$$X(u,v) = P_0 + u\overline{u}_1 + v\overline{u}_2$$

Θεωρω την επιφανεια $S: -x^2 - y^2 + z^2 = r^2$



Θεωρώ τη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(x,y,z) = -x^2 - y^2 + z^2 - r$

Ισχύει $S = f^{-1}(0)$

Τα κρισημα σημεια της f ειναι οι λυσεις του συστηματος:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \\ f_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -2y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

Το μονο κρισημο σημειο το $(0,0,0) \neq f^{-1}(0) \Longrightarrow$

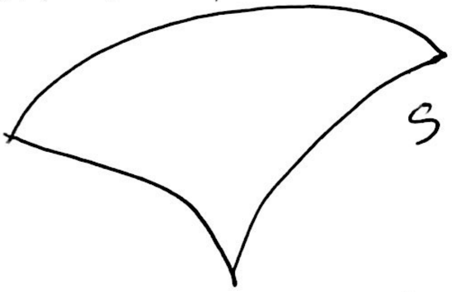
$\xRightarrow{\text{Θεωρημα}}$ $S = f^{-1}(0)$ ειναι κανονικη επιφανεια

$\boxed{\text{Ορισμός}}$: Μια κανονική επιφάνεια καλείται τροχιακά (ή οδικά) συνεκτική αν-ν για κάθε $p, q \in S$ $\exists$ συνεχής απεικόνιση (καμπύλη) $c : [0,1] \to S$: $c(0) = p$, $c(1) = q$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>: Η S είναι συνεκτική αν-ν είναι τροχιακά συνεκτική.

• Έστω S κανονική επιφάνεια και $X : U \to V \cap S$ απεικόνιση λεία, επί, 1-1 με $X_u \times X_v \neq 0$

Η X είναι ομοιομορφισμός



$$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, -\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)$$

<u>Ιακωβιανές ως προς u,v</u>

Έστω $P_0 = (u_0, v_0) \in U$ ώστε $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(P_{(0)}) \neq 0$

Θεωρώ την λεία απεικόνιση $F: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$F(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) \xrightarrow[\text{αντιστρ. απεικ}]{\text{Θεώρημα}}$ υπάρχει $U_0 \subseteq U$

περιοχή του P_0 και περιοχή W του $F(P_0)$ τέτοια ώστε

η $F|_{U_0}$ $U_0 \to W$ είναι διαφορομορφισμός.

$$\begin{cases} x(u,v) = x \\ y(u,v) = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

$\Pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\Pi(x,y,z) = (x,y)$ την προβολή

στο xy-επίπεδο: $F = \Pi \circ X$ διαφορομορφισμός

$X^{-1} = (\Pi \circ X)^{-1} \circ \Pi$ σύνθεση συνεχών.

$(x,y,z) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = (x, y, z(u(x,y), v(x,y)))$

<u>Συμπέρασμα</u>: (Κάθε κανονική συνάρτηση είναι γράφημα)

Έστω S κανονική επιφάνεια και $X: U \to V \cap S$ λεία, 1-1, επί, με $X_u \times X_v \neq 0$ παντού. Τότε:

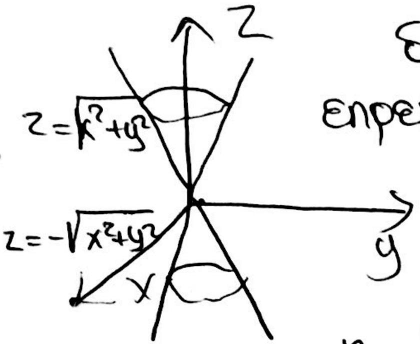
i) $\forall P_0 \in U$ $\exists$ περιοχή $U_0 \subseteq U$ του P_0 και προβολή $\Pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ (σε ένα από τα τρία επίπεδα συντεταγμένων) ώστε $\Pi \circ X|_{U_0}$ είναι διαφορομορφισμός

ii) Η S τοπικά είναι γράφημα λείας συνάρτησης.

π.χ: Θεωρώ την επιφάνεια με εξίσωση $x^2+y^2=z^2$

Είναι κανονική;;

Λύση: Κωνική επιφάνεια



Δεν είναι κανονική επιφάνεια γιατί θα έπρεπε τοπικά να είναι γράφημα.

Έστω ότι είναι κανονική επιφάνεια δεν είναι διαφορίσιμη στο (0,0)

$$\text{η} \begin{cases} -\sqrt{x^2+y^2}, & z<0 \\ \sqrt{x^2+y^2}, & z>0 \end{cases}$$

$X_U \to V \cap S$

Scanned by CamScanner